УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 154, кн. 2 Физико-математические науки *2012*

УДК 510.53

ЛИНЕЙНЫЕ ПОРЯДКИ. ТЕОРЕМЫ КОДИРОВАНИЯ

А.Н. Фролов

Аннотация

В работе рассмотрен ряд $\mathbf{0}'$- и $\mathbf{0}''$-кодирующих теорем. Получены две общие теоремы, обобщающие все известные на данный момент $\mathbf{0}'$- и $\mathbf{0}''$-кодирующие теоремы. Используя одну $\mathbf{0}'$-кодирующую теорему, получено описание рангов η-функций η-схожих линейных порядков, не имеющих вычислимых представлений.

Ключевые слова: линейные порядки, вычислимые представления, теоремы кодирования.

Введение

Основным объектом построения любого алгоритма является множество натуральных чисел $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Этого вполне достаточно для построения любой компьютерной модели. В частности, для кодирования целых чисел $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ можно использовать кодировку вида $\{\dots, 4, 2, 0, 1, 3, \dots\}$. Более сложная кодировка позволяет также закодировать множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Каждое из вышеприведенных множеств имеет естественное отношение порядка, которое является линейным, то есть таким, что любые два числа являются сравнимыми. При кодировании этих множеств нетрудно индуцировать естественное отношение порядка. Построенные линейные порядки изоморфны исходным порядкам, и поэтому имеют аналогичные свойства. Класс линейных порядков, изоморфных исходному, называется типом порядка. Типы линейных порядков $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ соответственно обозначаются ω, ζ и η.

Рассмотренные порядки являются тривиальными. Они вычислимы и, более того, разрешимы, то есть любая формула первого порядка вычислима. Нетривиальные линейные порядки, с точки зрения их алгоритмической сложности, впервые были построены Л. Фейнером [6, 7]. Линейный порядок, упорядоченный по типу $\zeta + a_0 + \zeta + a_1 + \zeta + a_2 + \cdots$, называется *сильным ζ-представлением* множества $A = \{a_0 < a_1 < a_2 < \cdots\}$. Здесь натуральное число обозначает тип конечного линейного порядка, мощность которого совпадает с этим числом.

Теорема 1 [6, 7]. *Линейный порядок, являющийся сильным ζ-представлением множества A, имеет вычислимое представление тогда и только тогда, когда A является Σ_3^0-множеством.*

Здесь для оценки алгоритмической сложности используется так называемая арифметическая иерархия множеств Σ_n. Множество X называется Σ_n-*множеством*, если $x \in X \Leftrightarrow \Psi(x)$, где Ψ – Σ_n-формула над вычислимым отношением (то есть содержит n переменных кванторов, начиная с квантора $\exists$). Множество X называется Π_n-*множеством*, если $\overline{X}$ является Σ_n-множеством. Если X является и Σ_n-, и Π_n-множеством, то X называется Δ_n^0-множеством.

В дальнейшем Δ^0_{n+1}-множества называются $\emptyset^{(n)}$*-вычислимыми.* Все вышеприведенные определения переносятся на тьюринговые степени, содержащие соответствующие множества. Например, тьюринговая степень является $\mathbf{0}^{(n)}$-степенью, если она содержит $\emptyset^{(n)}$-множество. Для краткости $\mathbf{0}^{(1)}$ и $\mathbf{0}^{(2)}$ обозначаются как $\mathbf{0}'$ и $\mathbf{0}''$ соответственно. Некоторые другие необходимые определения теории вычислимости будут излагаться далее в работе, а подробное изложение этой теории можно найти в [16].

Как мы видим, идея построения нетривиального линейного порядка заключается в кодировании в порядок некоторого множества. Ясно, что это кодирование допускает релятивизацию (впрочем, как и все приведенные в настоящей работе). Поэтому как следствие такого кодирования получаем, что существует $\mathbf{0}'$-вычислимый линейный порядок, не имеющий вычислимого представления. В качестве искомого линейного порядка достаточно взять сильное ζ-представление любого Σ^0_4-множества, не являющегося Σ^0_3-множеством.

Приведенное кодирование имеет предмет кодирования, которое является множеством $A = \{a_0 < a_1 < a_2 < \cdots\}$, и объект кодирования – линейный порядок $\Psi(A) = \zeta + a_0 + \zeta + a_1 + \zeta + a_2 + \cdots$. Связь предмета и объекта кодирования осуществляется с помощью оракула Σ^0_3, поэтому такое кодирование называется Σ^0_3*-кодированием*, а теорема Фейнера – Σ^0_3*-кодирующей теоремой.*

Следующее кодирование является примером кодирования одного линейного порядка в другой. Данный пример стал первым примером такого рода кодирования.

Теорема 2 [4]. *Линейный порядок L имеет $\mathbf{0}'$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда линейный порядок $(\eta + 2 + \eta) \cdot L$ имеет вычислимое представление.*

Как не трудно видеть, теорема связывает предмет кодирования (линейный порядок L) с объектом кодирования (линейным порядком $\Phi(L) \cong (\eta+2+\eta)\cdot L$). Связь предмета и объекта кодирования осуществляется с помощью оракула $\mathbf{0}'$, поэтому такие теоремы носят название $\mathbf{0}'$*-кодирующих теорем*, а Φ – $\mathbf{0}'$*-кодированием.* Если в теореме вместо оракула $\mathbf{0}'$ используется оракул $\mathbf{0}^{(n)}$, то такие теоремы называются $\mathbf{0}^{(n)}$*-кодирующими* и выглядят следующим образом.

Теорема 3 $\mathbf{0}^{(n)}$-кодирующая теорема. *Линейный порядок L имеет $\mathbf{0}^n$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда линейный порядок $\Phi_n(L)$ имеет вычислимое представление.*

Здесь $\Phi_n(L)$ является $\mathbf{0}^{(n)}$-кодированием. Требуем, чтобы такие кодирования допускали релятивизацию. Другими словами, L имеет $\mathbf{x}^n$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда линейный порядок $\Phi_n(L)$ имеет $\mathbf{x}$-вычислимое представление для любого степени $\mathbf{x}$. Различные кодирования, как показывает следующее предложение, связаны между собой и порождают новые кодирования.

Предложение 1. *Если Φ_n является $\mathbf{0}^{(n)}$-кодированием, а Φ_m – $\mathbf{0}^{(m)}$-кодированием, то $\Phi_n \circ \Phi_m$ является $\mathbf{0}^{(n+m)}$-кодированием.*

Доказательство. Так как Φ_m является $\mathbf{0}^m$-кодированием, линейный порядок L имеет $\mathbf{0}^{(n+m)}$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда линейный порядок $\Phi_m(L)$ имеет $\mathbf{0}^{(n)}$-вычислимое представление. Тогда из того, что Φ_n является $\mathbf{0}^{(n)}$-кодированием, следует, что $\Phi_m(L)$ имеет $\mathbf{0}^{(n)}$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда $\Phi_n(\Phi_m(L))$ имеет вычислимое представление. □

Каждая $\mathbf{0}^{(n)}$-кодирующая теорема имеет следующие следствия (эти следствия были замечены в частном случае в ранней работе автора [18]). Напомним, множество X является n*-низким*, если $X^{(n)} \leq_T \emptyset^{(n)}$, 1-низкое множество называется просто *низким.*

Предложение 2. *Если Φ_n является $\mathbf{0}^{(n)}$-кодированием, то каждый n-низкий линейный порядок, имеющий вид $\Phi_n(L)$ для некоторого L, является вычислимо представимым.*

Доказательство. Пусть $L_0 = \Phi_n(L)$ для некоторого L и L_0 является X-вычислимым, где X – n-низкое множество. Так как Φ_n является $\mathbf{0}^{(n)}$-кодированием и X – n-низкое множество, то L_0 имеет X-вычислимое представление тогда и только тогда, когда L имеет $X^{(n)}$-вычислимое представление, а это, в свою очередь, тогда и только тогда, когда L имеет $\emptyset^{(n)}$-вычислимое представление, что равносильно тому, что L_0 имеет вычислимое представление. □

Предложение 3. *Если Φ_n является $\mathbf{0}^{(n)}$-кодированием, то существует $(n+1)$-низкий линейный порядок, имеющий вид $\Phi_n(L)$ для некоторого L и не являющийся вычислимо представимым. Более того, порядок $\Phi_n(L)$ имеет представление в каждой Δ^0_2-степени, не являющейся n-низкой.*

Доказательство. Р. Миллер [12] построил линейный порядок A_0, имеющий копию в каждой такой степени $\mathbf{a}$, что $\mathbf{0}^{(n)} <_T \mathbf{a} <_T \mathbf{0}^{(n+1)}$. Пусть $L_0 = \Phi_n(A_0)$. Зафиксируем произвольную не n-низкую Δ^0_2-степень $\mathbf{c}$.

Так как Φ_n является $\mathbf{0}^{(n)}$-кодированием, получаем, что L_0 имеет копию в $\mathbf{c}$ тогда и только тогда, когда A_0 имеет копию в $\mathbf{c}^{(n)}$. Так как $\mathbf{c}$ – не n-низкая Δ^0_2-степень, то $\mathbf{0}^{(n)} <_T \mathbf{c}^{(n)} <_T \mathbf{0}^{(n+1)}$. Тогда A_0 имеет копию в $\mathbf{c}^{(n)}$, и следовательно, L_0 имеет копию в $\mathbf{c}$.

Так как $\mathbf{c}$ – произвольно выбранная не n-низкая Δ^0_2-степень, то, в частности, L_0 имеет $(n+1)$-низкое представление. □

Как мы видим $\mathbf{0}^{(n)}$-кодирующие теоремы имеют непосредственное приложение для построения вычислимых копий n-низких линейных порядков. В 1991 г. К. Джокуш и Р. Соар [10] доказали, что не каждый низкий линейный порядок имеет вычислимое представление (в отличие от булевых алгебр [3]). Однако, рассматривая дополнительные условия, накладываемые на порядковые типы, условие «низкости» может обеспечить вычислимую представимость линейных порядков. Так Р. Доуни и М. Мозес [5] установили, что для каждого низкого дискретного порядка существует вычислимая копия (линейный порядок называется дискретным, если каждый элемент имеет последователя и предшественника). Естественно возникает вопрос об описании порядковых типов, для которых условие «низкости» достаточно для вычислимой представимости (Р. Доуни [2]). Этот вопрос может быть естественным образом обобщен, заменив условие «низкости» на «n-низкости». В виду замеченной выше связи $\mathbf{0}^{(n)}$-кодирующих теорем и n-низких линейных порядков, рассматривая ниже $\mathbf{0}'$- и $\mathbf{0}''$-кодирующие теоремы, мы затронем и вопрос, поставленный Р. Доуни, и вопрос, обобщающий вопрос Р. Доуни.

1. $\mathbf{0}'$-кодирующие теоремы

Как уже было сказано выше, первым $\mathbf{0}'$-кодированием является $\Phi(L) = (\eta + 2 + \eta)$. Согласно предложениям 2 и 3 из $\mathbf{0}'$-кодирующей теоремы 2 следуют

Следствие 1 [18]. *Каждый низкий линейный порядок, имеющий вид $(\eta + 2 + \eta) \cdot L$ для некоторого L, является вычислимо представимым.*

Следствие 2 [18]. *Существует 2-низкий линейный порядок, имеющий вид $(\eta + 2 + \eta) \cdot L$ для некоторого L и не являющийся вычислимо представимым.*

Линейный порядок называется *k-блочным*, если все его блоки имеют мощность не более k. *Блоком* является множество $[x]_L = \{y \mid F(x,y) \vee F(y,x)\}$, где

$F_L(x,y) \rightleftharpoons (x <_L y)\,\&\,(|[x,y]_L| < +\infty)$ и $[x,y]_L \rightleftharpoons \{z \mid x <_L z <_L y\}$. Отношение $F_L(x,y)$ называется *отношением блока* линейного порядка L и порождает отношение эквивалентности $x \sim_L y \rightleftharpoons (x = y) \vee F_L(x,y) \vee F_L(y,x)$. Не трудно видеть, что блоки – это классы эквивалентности относительно $\sim_L$.

Например, 1-блочными линейными порядками являются только лишь плотные порядки. Линейные порядки, имеющие вид $(\eta{+}2{+}\eta)\cdot L$ для некоторого L, являются 2-блочными. Таким образом, последние два следствия утверждают, что существует 2-низкий 2-блочный линейный порядок, не имеющий вычислимого представления, с другой стороны, каждый низкий 2-блочный линейный порядок имеет вычислимую копию. Чтобы обобщить эти следствия для произвольного k-блочного порядка вместо 2-блочного, необходимо следующая $\mathbf{0}'$-кодирующая теорема, обобщающая теорему 2.

Теорема 4 [18]. *Линейный порядок $(\eta+k+1+\eta)\cdot L$ имеет вычислимое представление тогда и только тогда, когда L имеет $0'$-вычислимое представление.*

Теперь согласно соответственно предложениям 2 и 3 мы имеем

Следствие 3 [18]. *Каждый низкий линейный порядок вида $(\eta+k+1+\eta)\cdot L$ для некоторого L имеет вычислимое представление.*

Следствие 4 [18]. *Существует невычислимо представимый 2-низкий $(k+1)$-блочный линейный порядок, не являющий k-блочным.*

Линейный порядок L называется *сильно η-схожим*, если он является k-блочным для некоторого k. Другими словами, линейный порядок является сильно η-схожим, если существует натуральное число k такое, что все его блоки имеют мощность не более k. Чтобы доказать, что для всех k каждый низкий k-блочный линейный порядок (то есть сильно η-схожий) имеет вычислимое представление, необходима следующая теорема, которую можно назвать специфической $\mathbf{0}'$-кодирующей теоремой.

Теорема 5 [18] (см. также [9]). *Пусть L является сильно η-схожим. Тогда L имеет $\mathbf{0}'$-вычислимую копию, у которой отношение блока является $\mathbf{0}'$-вычислимым, тогда и только тогда, когда L имеет вычислимую копию.*

Следствие 5 [18]. *Каждый низкий сильно η-схожий линейный порядок изоморфен некоторому вычислимому порядку.*

В работе автора [18] предложена следующая теорема, позволяющая обобщить $\mathbf{0}'$-кодирующие теоремы Р. Доуни и Дж. Найт.

Теорема 6 [18]. *Пусть τ является вычислимым линейным порядком без наименьшего и наибольшего элементов. Если L является $\mathbf{0}'$-вычислимым линейным порядком, то $\tau\cdot L$ имеет вычислимое представление.*

Нетрудными рассуждениями можно показать, что теоремы 2 и 4 являются следствиями теоремы 6. Более того, из теоремы 6 выводится ряд следствий, которые ранее были неизвестными и требовали собственного доказательства, например, следующее следствие и многие другие (включая следствие 7 из следующего раздела).

Следствие 6. *Линейный порядок L имеет $\mathbf{0}'$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда $(\eta+1+\eta+2+\cdots+\eta+k+1+\eta)\cdot L$ имеет вычислимое представление.*

Доказательство. (Теоремы 2 и 4 выводятся из теоремы 6 аналогичными рассуждениями.)

($\Rightarrow$) Непосредственно следует из теоремы 6.

($\Leftarrow$) Очевидно, что множество таких наборов $(a_1, \ldots, a_{k+1})$, что (a_i, a_{i+1}) является парой соседних элементов для любого $i \leq k$, является $\mathbf{0}'$-вычислимым. Ясно, что это множество наборов с индуцированным порядком изоморфно L. $\square$

2. Одно применение $\mathbf{0}'$-кодирующей теоремы

Линейный порядок называется *η-схожим* (*η-like*), если его можно представить в виде $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} f(q)$ для некоторой функции $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ такой, что $0 \notin \mathrm{rng}(f)$. Функция f называется *η-функцией* линейного порядка L. Не трудно видеть, что если область значений η-функции η-схожего линейного порядка ограничена, то порядок является сильно η-схожим.

Дж. Розенштейном [14] было установлено, что для вычислимого η-схожего линейного порядка η-функция может быть выбрана из класса Δ^0_3, и следовательно, ее ранг будет из класса Σ^0_3. С. Феллнер [8] показал, что если $f \in \Pi^0_2$, то линейный порядок $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} f(q)$ имеет вычислимое представление. Однако не каждая Δ^0_3-вычислимая функция является η-функцией вычислимого линейного порядка. Первый пример такой функции (с бесконечным рангом) был построен в совместной работе М. Лермана и Дж. Розенштейна [11]. Позже Р. Доуни [2, теорема 4.16] построил Δ^0_3-вычислимую функцию f такую, что $\mathrm{rng}(f) = \{1, 2, 3, 4\}$ и линейный порядок $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} f(q)$ не имеет вычислимого представления.

Естественно возникает вопрос: какие еще ранги могут иметь аналогичные примеры функций, то есть функций, не являющихся η-функциями для вычислимых линейных порядков. В частности, можно ли доказать утверждение Р. Доуни для $\mathrm{rng}(f) = \{1, 2\}$ вместо $\mathrm{rng}(f) = \{1, 2, 3, 4\}$? Следующая теорема, опубликованная ранее автором в кратком сообщении [20], отвечает на эти вопросы.

Теорема 7. *Пусть f – произвольная X-вычислимая η-функция с неодноэлементным рангом. Тогда существует $X\oplus\emptyset''$-вычислимая η-функция g такая, что $\mathrm{rng}(g) = \mathrm{rng}(f)$ и $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} g(q)$ не имеет вычислимой копии. Причем если f имеет конечный ранг или хотя бы $\deg_T(f) \leq \mathbf{0}''$, то функция g может быть выбрана $\mathbf{0}''$-вычислимой.*

Доказательство. Из теоремы 6 аналогично доказательству следствия 6 вытекает следующее $\mathbf{0}'$-кодирование.

Следствие 7. *Пусть $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$, $a_0 \neq 0$ и $n \geq 1$. Тогда линейный порядок L имеет $\mathbf{0}'$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда линейный порядок $L' = (a_0\eta + a_1 + a_0\eta + \cdots + a_0\eta + a_n + a_0\eta) \cdot L$ имеет вычислимое представление.*

Понятно, что линейный порядок $(a_0\eta+a_1+a_0\eta+\cdots+a_0\eta+a_n+a_0\eta)\cdot L$ является η-схожим, и следовательно, для него существует некоторая η-функция. Построим ее вычислимо относительно оракула X такого, что X вычисляет L. Зафиксируем X-равномерно вычислимую последовательность $\{Q_x\}_{x\in L}$ такую, что $Q = \sum\limits_{x\in L} Q_x$ является X-вычислимым линейным порядком, Q_x – плотным линейным порядком без концевых точек для каждого $x \in L$. Тогда $Q \cong \mathbb{Q}$.

Выберем n произвольных элементов (например, с наименьшим натуральным номером) $q^x_1 <_Q \cdots <_Q q^x_n$ из каждого Q_x. Определим вспомогательную функцию $\widetilde{f}$: положим $\widetilde{f}(q^x_i) = a_i$ для всех $x \in L$ и $1 \leq i \leq n$ и $\widetilde{f}(q) = a_0$ для всех остальных $q \in \mathbb{Q}$. Заметим, что $\sum\limits_{q\in Q_x} \widetilde{f}(q) \cong a_0\eta + a_1 + a_0\eta + \cdots + a_0\eta + a_n + a_0\eta$.

Так как $Q \cong \mathbb{Q}$, существует X-вычислимый изоморфизм $\varphi : \mathbb{Q} \to Q$. Положим теперь $f(q) = \widetilde{f}(\varphi(q))$ для всех $q \in \mathbb{Q}$. Понятно, что функция f является X-вычислимой. Причем $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} f(q) \cong \sum\limits_{q\in Q} \widetilde{f}(q) \cong \sum\limits_{x\in L}\sum\limits_{q\in Q_x} \widetilde{f}(q) \cong \sum\limits_{x\in L}(a_0\eta + a_1 + a_0\eta + {} + \cdots + a_0\eta + a_n + a_0\eta) \cong (a_0\eta + a_1 + a_0\eta + \cdots + a_0\eta + a_n + a_0\eta)\cdot L$.

Таким образом, доказано, что для X-вычислимого линейного порядка L существует X-вычислимая η-функция f такая, что $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} f(q) \cong (a_0\eta + a_1 + a_0\eta + \cdots + {} + a_0\eta + a_n + a_0\eta)\cdot L$, где $a_0 \neq 0$ и $n \geq 1$.

Пусть $D = \{a_0 < a_1 < \cdots < a_n\}$, где $a_0 \neq 0$ и $n \geq 1$. Предположим, что $\widetilde{L}$ – $\mathbf{0}''$-вычислимый линейный порядок, не имеющий $\mathbf{0}'$-вычислимой копии. Тогда по доказанному выше существует $\mathbf{0}''$-вычислимая η-функция f такая, что $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} f(q) \cong L$ и $\mathrm{rng}(f) = D$, где $L = (a_0\eta + a_1 + a_0\eta + \cdots + a_0\eta + a_n + a_0\eta)\cdot\widetilde{L}$. Так как $\widetilde{L}$ не имеет $\mathbf{0}'$-вычислимого представления, из следствия 7 вытекает, что L не имеет вычислимой копии.

Таким образом, доказано, что для конечного множества D такого, что $0 \notin D$ и $|D| > 1$, существует $\mathbf{0}''$-вычислимая η-функция f, что линейный порядок $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} f(q)$ не имеет вычислимого представления при $\mathrm{rng}(f) = D$.

Пусть теперь f – произвольная η-функция с бесконечным рангом. Построим новую функцию g, имеющую тот же самый ранг, что и f, но $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} g(q)$ не имеет вычислимой копии. Зафиксируем конечное множество $D \subset \mathrm{rng}(f)$: $0 \notin D$ и $|D| > 1$. Из доказанного выше следует, что существует $\mathbf{0}''$-вычислимая η-функция $\widetilde{f}$, причем $\mathrm{rng}(\widetilde{f}) = D$ и $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} \widetilde{f}(q)$ не имеет вычислимого представления. Пусть Q_1 и Q_2 – два плотных линейных порядка без концевых точек. Имеем вычислимые изоморфизмы $\varphi_1 : \mathbb{Q} \to Q_1$, $\varphi_2 : \mathbb{Q} \to Q_2$ и $\varphi : \mathbb{Q} \to Q_1 + 1 + Q_2$. Зафиксируем произвольный элемент a_0 из $\mathrm{rng}(f)$.

Построим новую функцию g:

1) положим $g(q) = \widetilde{f}(\varphi_1^{-1}(\varphi(q)))$ для любого $q \in \mathbb{Q}$ такого, что $\varphi(q) \in Q_1$;

2) положим $g(q) = f(\varphi_2^{-1}(\varphi(q)))$ для любого $q \in \mathbb{Q}$ такого, что $\varphi(q) \in Q_2$;

3) положим, наконец, $g(q) = a_0$ для единственного $q \in \mathbb{Q}$, причем $\varphi(q) \notin Q_1$ и $\varphi(q) \notin Q_2$.

Имеем

$$\sum_{q\in\mathbb{Q}} g(q) \cong \sum_{q\in\mathbb{Q},\varphi(q)\in Q_1} g(q) + a_0 + \sum_{q\in\mathbb{Q},\varphi(q)\in Q_2} g(q) \cong$$
$$\cong \sum_{q\in Q_1} \widetilde{f}(\varphi_1^{-1}(q)) + a_0 + \sum_{q\in Q_2} f(\varphi_2^{-1}(q)) \cong \sum_{q\in\mathbb{Q}} \widetilde{f}(q) + a_0 + \sum_{q\in\mathbb{Q}} f(q).$$

Так как линейный порядок $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} \widetilde{f}(q)$ не имеет вычислимого представления, линейный порядок $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} g(q)$ также не имеет вычислимого представления. Наконец, очевидно, $\mathrm{rng}(g) = \mathrm{rng}(f)$. Таким образом, теорема доказана. □

3. $\mathbf{0}''$-кодирующие теоремы

Классической $\mathbf{0}''$-кодирующей теоремой является следующая

Теорема 8 [15]. *Линейный порядок L имеет $\mathbf{0}''$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда $\zeta \cdot L$ имеет вычислимое представление.*

Модифицируя исходное доказательство, К. Эш и Дж. Найт [1] предлагают следующую $\mathbf{0}''$-кодирующую теорему.

Теорема 9 [1]. *Линейный порядок L имеет $\mathbf{0}''$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда $\omega \cdot L$ имеет вычислимое представление.*

Оба доказательства используют так называемый приоритетный метод с бесконечными нарушениями, или метод $\mathbf{0}''$-приоритета. Все известные $\mathbf{0}'$-кодирующие теоремы доказаны с помощью приоритетного метода с конечными нарушениями, или метода $\mathbf{0}'$-приоритета. Метод $\mathbf{0}''$-приоритета явно сложнее метода $\mathbf{0}'$-приоритета. Имеющаяся картина кажется логичной. Однако в этом разделе получим некоторые обобщения известных $\mathbf{0}''$-кодирующих теорем с использованием только лишь метода $\mathbf{0}'$-приоритета, то есть более простым методом.

Для этого используется понятие отношения соседства на линейных порядках. Говорим, что элементы x и y линейного порядка L находятся в отношении соседства, если $x <_L y$ и для любого z не верно $x <_L z <_L y$. Отношение соседства на линейном порядке L обозначается $Succ_L$.

Теорема 10. *Пусть τ является вычислимым линейным порядком с вычислимым отношением соседства и выполнено*

$$(\forall x)(\forall n)(\exists x', y')[(x <_\tau x' <_\tau y') \,\&\, |[x', y']_\tau| = n] \tag{1}$$

или

$$(\forall x)(\forall n)(\exists x', y')[(x >_\tau x' >_\tau y') \,\&\, |[x', y']_\tau| = n]. \tag{2}$$

Тогда если L является $\mathbf{0}'$-вычислимым линейным порядком, то $\tau \cdot L$ имеет вычислимое представление, обладающее вычислимым отношением соседства.

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что выполнены оба условия (1) и (2). Будем строить вычислимое представление линейного порядка $L_0 = \tau \cdot L$ из блоков L_i, то есть $L_0 = \sum\limits_{i \in L} L_i$, где L_i – копия τ. В каждом блоке необходимо объявлять некоторые пары элементов *соседними* и никогда не добавлять между ними новых элементов. Так как L является $\mathbf{0}'$-вычислимым, то существует такая $\mathbf{0}'$-вычислимая последовательность конечных линейных порядков $\{A_t\}_{t \in \omega}$, что $A_0 = \emptyset$, $A_t \subset A_{t+1}$ и $L = \bigcup\limits_t A_t$. Следовательно, существует равномерно вычислимая аппроксимация $\{A_{t,s}\}_{t,s \in \omega}$ такая, что $A_t = \lim\limits_{s \to +\infty} A_{t,s}$.

Строим L_0 следующим образом. Если на некотором шаге s появляется новый элемент $i \in A_{t,s}$ и $x < i < y$ – соседние элементы в $A_{t,s}$, то добавляем в L новый блок L_i между блоками L_x и L_y. Если же некоторый j выходит из $A_{t,s'}$ на некотором шаге s', то элементы соответствующего блока L_j присоединяем к одному из соседних блоков в L, так как эти элементы становятся уже «лишними». Если соседний только один, то присоединяем к нему. Если есть соседний и слева – L_a, и справа – L_b, то выбираем наименьшее из a и b (наименьшее как натуральное число) и присоединяем «лишние» элементы *старого* блока L_j к блоку с выбранным номером. Можно считать, что линейный порядок L не пустой, так как иначе теорема очевидна. Поэтому предполагаем, что хотя бы один соседний блок имеется.

Присоединение «лишних» элементов к некоторому блоку L_p справа или слева осуществляется следующим образом. Для любых двух «лишних» элементов x и y, которые расположены по соседству на данном шаге, но которые еще не объявлены *соседними*, положим новый «лишний» элемент z между ними и объявим пары (x, z) и (z, y) соседними. После этого все «лишние» элементы будут попарно соседними. В силу условий (1) и (2) всегда можно расширить блок L_p слева или справа так, чтобы сохранить построение копии τ с объявленными соседними элементами.

Далее на каждом шаге в каждом блоке кладем новые элементы, строя копию τ. Так как τ имеет вычислимое отношение соседства, то одновременно объявляем соответствующие пары элементов соседними.

Пусть $s = s(t)$ такой шаг, что для любого $s' \geq s$ $A_t = A_{t,s'}$, тогда после этого шага никакой блок L_i для $i \in A_t$ не будет присоединен к другому, а только, может быть, некоторые другие будут присоединены к нему слева или справа, но, как уже говорилось выше, это не портит построение копии τ с вычислимыми парами соседних элементов. Таким образом, $L_0 \cong \tau \cdot L$ и L_0 имеет вычислимое отношение соседства. □

Обозначим класс линейных порядков, которые либо имеют вычислимые представления, либо не имеют низкого представления, как $\mathbf{L_1}$. Другими словами, если L – низкий линейный порядок и $L \in \mathbf{L_1}$, то L имеет вычислимое представление. В этом обозначении вопрос Р. Доуни [2], озвученный в первом разделе, теперь означает описать класс $\mathbf{L_1}$.

Теорема 11. *Пусть τ является $\mathbf{0}'$-вычислимым с $\mathbf{0}'$-вычислимым отношением соседства, удовлетворяет условию* (1) *и условию* (2) *теоремы* 10 *и такой, что $\tau \cdot L \in \mathbf{L_1}$ для любого линейного порядка L. Тогда если линейный порядок L имеет $\mathbf{0}''$-вычислимое представление, то $\tau \cdot L$ имеет вычислимое представление.*

Доказательство. Пусть τ является $\mathbf{0}'$-вычислимым с $\mathbf{0}'$-вычислимым отношением соседства и удовлетворяет условиям (1) и (2) теоремы 10. И пусть L является $\mathbf{0}''$-вычислимым. По теореме 10, релятивизованной относительно $\mathbf{0}'$, линейный порядок $\tau \cdot L$ имеет $\mathbf{0}'$-вычислимое представление с $\mathbf{0}'$-вычислимым отношением соседства.

В работе автора [19] и независимо в работе А. Монталбана [13] доказано, что линейный порядок имеет низкое представление тогда и только тогда, когда он имеет $\mathbf{0}'$-вычислимое представление, обладающее $\mathbf{0}'$-вычислимым отношением соседства. (Этот результат может рассматриваться как специфическая $\mathbf{0}'$-кодирующая теорема.)

Отсюда следует, что порядок $\tau \cdot L$ имеет низкое представление. Так как $\tau \cdot L \in \mathbf{L_1}$, то $\tau \cdot L$ имеет вычислимую копию. Что и требовалось доказать. □

Из теоремы 11 следует целый ряд следствий (теоремы 8 и 9 также являются следствиями теоремы 11). Покажем только некоторые из них.

Следствие 8. *Линейный порядок L имеет $\mathbf{0}''$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда $(\zeta + 1 + \zeta) \cdot L$ имеет вычислимое представление.*

Следствие 9. *Линейный порядок L имеет $\mathbf{0}''$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда $(\omega^* + \eta + \zeta) \cdot L$ имеет вычислимое представление.*

Доказательство. Проведем одновременное доказательство теорем 8 и 9, следствий 8 и 9.

Для любого L линейные порядки $\zeta \cdot L$, $\omega \cdot L$, $(\zeta+1+\zeta) \cdot L$ и $(\omega^*+\eta+\zeta) \cdot L$ являются 0-квазидискретными. (Линейный порядок R называется *0-квазидискретным*, если либо $[x]_R \cong \zeta$, либо $[x]_R \cong \omega$, либо $[x]_R \cong \omega^*$ для любого x.)

В работе [17] доказано, что каждый 0-квазидискретный линейный порядок содержится в классе $\mathbf{L_1}$. И следовательно, по теореме 11 если L является $\mathbf{0}''$-вычислимым, то $\zeta \cdot L$, $\omega \cdot L$, $(\zeta + 1 + \zeta) \cdot L$ и $(\omega^* + \eta + \zeta) \cdot L$ имеют вычислимые копии. Обратное утверждение устанавливается непосредственной проверкой.

Стоит отметить, что данное доказательство опирается на работу автора совместно с П. Алаевым и Дж. Тёрбером [17], а также на теорему 10, доказательства которых используют лишь метод приоритета с конечными нарушениями. А исходное доказательство теорем 8 и 9 использует метод приоритета с бесконечными нарушениями. □

Естественными модификациями доказательств теорем 10 и 11 доказывается следующая теорема.

Теорема 12. *Пусть* τ *является* $\mathbf{0}'$*-вычислимым* k*-блочным линейным порядком с* $\mathbf{0}'$*-вычислимым отношением соседства и выполнено*

$$(\forall x)(\exists y)[(y >_\tau x) \,\&\, |[y]_\tau| = k] \tag{3}$$

или

$$(\forall x)(\exists y)[(y <_\tau x) \,\&\, |[y]_\tau| = k)]. \tag{4}$$

Пусть $\tau \cdot L \in \mathbf{L_1}$ *для любого линейного порядка* L*. Тогда если линейный порядок* L *имеет* $\mathbf{0}''$*-вычислимое представление, то* $\tau \cdot L$ *имеет вычислимое представление.*

Эта теорема позволяет получить некоторые новые $\mathbf{0}''$-кодирования, например, такие, как следующее следствие, и многие другие.

Следствие 10. *Пусть* $k > n$*. Тогда линейный порядок* L *имеет* $\mathbf{0}''$*-вычислимое представление тогда и только тогда, когда* $(\cdots + \eta + k + 1 + \eta + k + 1 + \eta + + n + 1 + \eta + k + 1 + \eta + k + 1 + \eta + \cdots) \cdot L$ *имеет вычислимое представление.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 10-01-00399 и 12-01-97008), гранта для поддержки ведущих научных школ НШ-5383.2012.1, а также гранта Президента РФ МК-611.2011.1.

Summary

A.N. Frolov. Linear Orderings. Coding Theorems.

In this paper, we consider $\mathbf{0}'$- and $\mathbf{0}''$-coding theorems. We obtain two general theorems which generalize all $\mathbf{0}'$- and $\mathbf{0}''$-coding theorems known at this moment. Using one $\mathbf{0}'$-coding theorem, we describe ranges of η-functions of η-like linear orderings with no computable representations.

Key words: linear orderings, computable representations, coding theorems.

Литература

1. *Ash C.J., Knight J.* Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy. – Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 2000. – XVI + 346 p.
2. *Downey R.G.* Computability theory and linear orders // Ershov Yu.L., Goncharov S.S., Nerode A., Remmel J.B. (eds.) Handbook of Recursive Mathematics. V. 1. – Elsevier, 1988. – P. 823–976.
3. *Downey R.G., Jockusch C.G.* Every low Boolean algebra is isomorphic to a recursive one // Proc. Amer. Math. Soc. – 1994. – V. 122, No 3. – P. 871–880.
4. *Downey R.G., Knight J.F.* Orderings with α-th jump degree $\mathbf{0}^{(\alpha)}$ // Proc. Amer. Math. Soc. – 1992. – V. 114, No 2. – P. 545–552.
5. *Downey R.G., Moses M.F.* On choice sets and strongly nontrivial self-embeddings of recursive linear orderings // Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math. – 1989. – Bd. 35, H. 3. – S. 237–246.

6. *Feiner L.J.* Orderings and Boolean Algebras not isomorphic to recursive ones: PhD Thesis. – Cambridge, MA: MIT, 1967. – 89 p. – URL: http://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/60738/29976019.pdf?sequence=1.

7. *Feiner L.J.* The strong homogeneity conjecture // J. Symb. Logic. – 1970. – V. 35, No 3. – P. 373–377.

8. *Fellner S.* Recursive and finite axiomatizability of linear orderings: PhD Thesis. – New Brundswick, N. J.: Rutgers Univ., 1976.

9. *Frolov A., Zubkov M.* Increasing η-representable degrees // Math. Log. Quart. – 2009. – V. 55, No 6. – P. 633–636.

10. *Jockusch C.G. Jr., Soare R.I.* Degrees of orderings not isomorphic to recursive linear orderings // Ann. Pure Appl. Logic. – 1991. – V. 52, No 1–2. – P. 39–64.

11. *Lerman M., Rosenstein J.R.* Recursive linear orderings // Patras Logic Symposion (Proc. Logic Sympos. Patras, Greece, Aug. 18–22, 1980) (Stud. Logic Found. Math. V. 109). – 1982. – P. 123–136.

12. *Miller R.* The Δ_2^0 spectrum of a linear ordering // J. Symbolic Logic. – 2001. – V. 66, No 2. – P. 470–486.

13. *Montalban A.* Notes on the jump of a structure // Mathematical Theory and Computational Practice. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. – P. 372–378.

14. *Rosenstein J.R.* Linear orderings (Pure and Applied Mathematics. V. 98). – N. Y.– London: Acad. Press Inc., Hartcourt Brace Jovanovich Publ., 1982. – 487 p.

15. *Watnik R.* A generalization of Tennenbaum's Theorem on effectively finite recursive linear orderings // J. Symb. Logic. – 1984. – V. 49, No 2. – P. 563–569.

16. *Соар Р.И.* Вычислимо перечислимые множества и степени. – Казань: Казан. матем. о-во, 2000. – 576 с.

17. *Алаев П., Тёрбер Дж., Фролов А.* Вычислимость на линейных порядках, обогащённых предикатами // Алгебра и логика. – 2009. – Т. 48, № 5. – С. 549–563.

18. *Фролов А.Н.* Δ_2^0 копии линейных порядков // Алгебра и логика. – 2006. – Т. 45, № 3. – С. 354–370.

19. *Фролов А.Н.* Линейные порядки низкой степени // Сиб. матем. журн. – 2010. – Т. 51, № 5. – С. 1147–1162.

20. *Фролов А.Н.* Ранги η-функций η-схожих линейных порядков // Изв. вузов. Матем. – 2012. – № 3. – С. 96–99.

Поступила в редакцию
14.02.12

Фролов Андрей Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и математического моделирования Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Andrey.Frolov@ksu.ru*